FS1111

Leyes de Newton

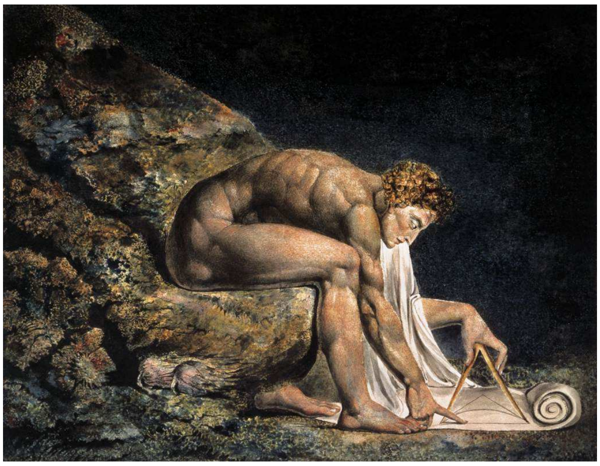
Mario I. Caicedo

Departamento de Física, Universidad Simón Bolívar

Índice

1. Introducción

La mecánica es, probablemente, una de las subdisciplinas más antígüas de la física. Los objetivos primarios de la mecánica consisten en: explicar el equilibrio y el movimiento de los cuerpos que observamos a nuestro alrededor pretendiendo, no solo describir los movimientos, sino comprender las causas que los producen.



Newton por William Blake. Tinta y acuarela sobre papel. Galería Tate, Londres.

La mecánica se erige sobre dos principios básicos, el primero es el el principio de "causalidad", este es un principio filosófico basado en la experiencia según el cual, todo ocurre debido a una causa que lo precede. El otro principio filosófico fundamental es el "reduccionismo"; en términos muy simples podemos entender el reduccionismo como un enfoque al estudio de la naturaleza de lo complejo en términos del estudio de sus partes y de las interaciones entre ellas[1]. Expresado en otros términos, el reduccionismo establece que un sistema complejo no es otra cosa que la suma de sus partes y que por lo tanto, para entenderlo nos basta con entender sus constituyentes y las interacciones entre estos. De acuerdo al reduccionismo, es posible estudiar los fenómenos que nos interesan desechando cualidades de los mismos que podrían ser innecesarias para la descripción. Ni el principio de causalidad ni la postura reduccionista son obvios o necesariamente ciertos pero ambos están en el corazón de la disciplina que queremos estudiar.

Galileo [15/02/1564-8/01/1642] y otros antes que él habían estudiado la cinemática, e incluso habían tratado de discutir algunas de las causas que determinaban los movimientos de las partículas. Según proponía Aristóteles en el cuarto siglo antes de nuestra era, es necesario empujar para poder mover un objeto, ó expresado de otra manera no es posible un movimiento sin una fuerza motriz que lo mantenga. A decir verdad, nuestra experiencia diaria nos empuja a compartir las ideas aristotélicas (si no lo cree trate de encontrar una caja que se desplaze eternamente sin requerir que algo la empuje). Ahora bien, las enseñanzas de Aristóteles y nuestra experiencia diaria, son falaces y es menester echar mano de una buena dosis de abstracción para darnos cuenta de esto.

[1] La medicina y sus especialidades constituyen un excelente ejemplo de reduccionismo. El cuerpo humano está formado por un enorme número de células cuyas interacciones las llevan a organizarse en órganos; el metabolismo no es otra cosa que el resultado de la interacción entre los órganos. La postura reduccionista consiste en pensar que si se entiende el comportamiento de cada órgano por separado se puede entender el proceso de la vida

Galileo fue quien introdujo la noción de que la tendencia natural de los cuerpos era mantener su estado de movimiento. Pero no fué sino hasta Isaac Newton[2] [25/12/1642-20/3/1726/7] que esta noción se estableció de manera más precisa y que apareció un tratamiento adecuado del problema de causalidad del movimiento. En términos modernos, Newton introdujo la noción de fuerzas como causas de los cambios en el estado de movimiento de los cuerpos así como la necesidad de definir las fuerzas y otros objetos de interés como lo que hoy en día conocemos como vectores.

2. Leyes de Newton: Formulación Original

El interés por la física y la curiosidad histórica nos hacen imposible resistir la tentación de comentar un poco el enunciado de las leyes de Newton tal y como aparecen en la primera edición de la obra de Newton. Los Principia están escritos en un lenguaje que recuerda mucho al de los libros de matemáticas, aprecen definiciones, axiomas (leyes), teoremas, corolarios y sus demostraciones rigurosas. De hecho, el primer capítulo introduce las definiciones básicas.

Cada idea (sea una definición, una ley, o cualquier otra cosa) es introducida con total precisión y es acompañada de algunas explicaciones que ayudan a ilustrarla. En todo caso, el grado de observación de la naturaleza, de abstracción de las observaciones y de cuidado con que se describe cada detalle son enormes y están evidentemente influenciados por Galileo. Habiendo dicho esto, demos nuestro pequeño paseo histórico.

Es necesario destacar que las definiciones asociadas a movimiento están formuladas desde

[2]Curiosamente Newton nació el año en que murió Galileo

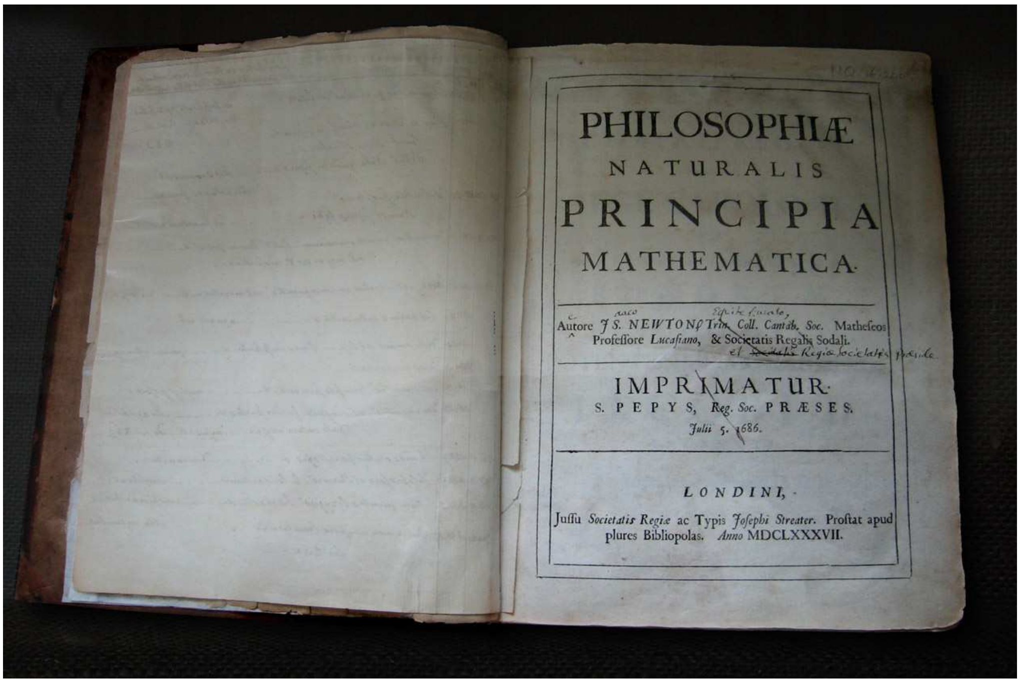


Figura 1: Una copia personal de Newton de la primera edición de los *Principia*, contiene notas a mano para las correcciones para la segunda. La obra fue publicada bajo los auspicios de Edmond Halley el 5 de julio de 1687

el punto de vista de un observador en tierra, lo que presupone que -en términos modernos- un observador fijo en la tierra es inercial (hipótesis que, como veremos en el parágrafo 3.1, es falsa, aunque tiene una validez aproximada). La obra está escrita en una forma dificil de leer para los usuarios del cálculo diferencial e integral, sin embargo, si se obvia ese detalle, los razonamientos son bastante limpios y elegantes.

2.1. Definiciones

PHYLOSOPIAÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA

DEFINITIONES

Def. I

Quantitas materiæ est mensura ejustem orta ex illius Densitate & Magnitudine Conjunctim.

La cantidad de materia es la medida de esta que surge de su densidad y volumen conjuntamente.

Antes de continuar es muy importante destacarse que, en el contexto, la expresión latina *Densitate & Magnitudine Conjunctim* debe entenderse como el producto de la *Densitate* y la *Magnitudine*, de manera que la *Quantitas materiæ* está dada por la fórmula: *densidad* $\times$ *volumen*, y es por lo tanto, la masa tal y como la conocemos hoy día. Evidentemente se puede criticar que la definición es incompleta ya que requiere de haber definido la densidad, pero acá no nos ocuparemos de ese problema, lo que nos interesa es el hecho de que Newton pretende dar una definici'on concreta de la *Quantitas materiæ*.

En la discusión que sigue inmediatamente a la definición de la *Quantitas materiæ* Newton expresa "*...per experimenta pendulorum...*" es decir: *por experimentos en péndulos*, indicando entonces una base experimental de su trabajo.

Def. II

Quantitas motus est mensura ejustem orta ex Velocitate et quantitate Materiæ Conjunctim.

La cantidad de movimiento es la medida de esta que surge conjuntamente de la velocidad y la cantidad de materia.

De acuerdo con lo que ya hemos aprendido de latín, la expresión *Velocitate et quantitate Materiæ Conjunctim* que aparece en la definición II de Newton es el producto de la masa del cuerpo por su velocidad. La *Quantitas motus* es pues lo que hoy día conocemos como: momentum, ímpetu, ó (respetando la escojencia de Newton), cantidad de movimiento.

Def. III

Materiæ vis insita est potentia resistendi, qua corpus unumquodq;, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiscendi vel movendi uniformiter in directum.

La *vis insita*, o fuerza innata de la materia, es un poder de resistir, por el cual todo cuerpo, en tanto esta está en él, se esfuerza en perseverar en su estado presente, sea este de reposo, o de movimiento uniforme a lo largo de una recta.

Newton continua explicando y dice

"...*unde tiam vis insita nomine fignificantiffimo vis inertiæ dicci poffit*", en castellano: "esta vis insita, puede por un nombre mas significativo, ser llamada inertiæ, o fuerza de inactividad".

Newton continúa explicando:

2.2. Leyes del Movimiento

Los *Principia* contin'uan con otras definiciones a las que no haremos referencia en este momento, pasando luego a presentar las leyes de movimiento[3].

LEGES MOTUS

Lex I

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum illuum mutare.

Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilneo a no ser que sea obligado por fuerzas impresas a cambiar su estado

[3]las traducciones al castellano de las leyes han sido tomadas de: "A Hombros de Gigantes", edición de S. Hawking, editorial Crítica, Barcelona, España 2004. ISBN: 84-8432-568-7

Lex II

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime.

Este es un punto sumamente importante, en casi toda la literatura de física para ciencias e ingeniería la ley segunda ley se escribe en la forma: *fuerza=masa*× *aceleración*. Esto no es de modo alguno lo expresado en la Lex II, que como podemos leer claramente se refiere al cambio en el *motus*, es decir en la *Quantitas motus*, es decir: *fuerza=cambio en la Quantitas motus*. De hecho, y según entendemos hoy día, este "cambio" es en verdad la tasa de cambio instantánea, es decir, la derivada temporal del momentum.

Lex III

Actioni contrariam semper & æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales & in partes contrarias dirigi.

Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria: o sea, las acciones mutuas de dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en direcciones opuestas.

Uno de los razonamientos más sencillos y claros que el autor de estas notas ha leído alguna vez, es la demostración del Corolario I de los *Principia* que reza:

Corol. I

Corpus viribus conjunctis diagonallem parallelogrammi edom tempore describeri, quo latera separatis.

Un cuerpo recorre la diagonal de un paralelogramo bajo dos fuerzas conjuntas en el mismo tiempo en que recorrería los dos lados bajo las las dos acciones por separado.

En este corolario y su demostració n podemos reconocer que las fuerzas son vectores.

A pesar de que el éxito de la mecánica de Newton es inneglabe, tanto desde el punto de vista puramente cientíco como desde el punto de vista práctico (la construcción de maquinarias, edificios, aviones, etc. utiliza la mecánica newtoniana como ingrediente fundamental), es menester criticarla. En primer lugar debemos recordar que las teorías tienen rangos en que son aplicables, la mecánica Newtoniana solo es aplicable en el dominio de los objetos macroscópicos que se mueven a velocidades pequeñas comparadas con la de la luz ($c \approx 300{,}000\, Km/s$). Para objetos de talla molecular ó más pequeña, esto es, de dimensiones longitudinales t[ıpicas del orden de las décimas nanometros o más pequeñas la teoría de Newton falla miserablemente y debe ser sustituida por la mecánica cuántica. Para objetos que se mueven de tal manera que el cociente entre su rapidez ($\dot{s}$) y c satisface $\dot{s}/c \geq 0{,}1$ hay que introducir la dinámica relativista de Einstein.

En segundo lugar, desde los primeros trabajos de Poincarè hemos aprendido que, si bien bueno como principio aproximado, el reduccionismo no es adecuado para la descripción de la naturaleza, cuyos sistemas son de tal complejidad que el todo termina siendo mucho más que la suma de sus partes.

3. Leyes de Newton: una visión más moderna

En términos bien precisos, y algo modernos, la mecánica Newtoniana solo estudia la mecánica del punto. Es decir, los objetos se piensan como puntos matemáticos de la geometría euclídea (así como lo está leyendo: un planeta es un punto). Los objetos con dimensiones (planetas, autos, personas, etc.) se piensan como sistemas de muchas partículas puntuales (la idea de integración está detrás de esto).

Es importante comentar que las leyes de Newton contienen una importante cantidad de información implícita. En primer lugar son leyes que permiten estudiar el movimiento de *partículas puntuales* en términos de vectores, en segundo lugar, establecen la existencia de un único tiempo universal y de la existencia de sistemas de referencia inerciales que son los únicos en que las leyes son aplicables.

Para ser más precisos, lo que se describe como posición del punto no es otra cosa que nuestro moderno vector de posición en función del tiempo $\mathbf{r}(t)$ (que debemos entender como un vector de $\Re^3$ con origen en el origen del sistema de coordenadas).Dicho esto y para entrar en materia seriamente supondremos que usted maneja las ideas de la cinemática del punto: sistemas de referencia inerciales, el vector de posición $\mathbf{r}(t)$, la velocidad $\dot{\mathbf{r}}(t)$, la aceleración $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ y como cambian estos vectores cuando son descritos desde sistemas de referencia inerciales diferentes.

Además, suponiendo que tenemos una noción de la masa de una partícula introduciremos la definición de momentum de Newton en términos modernos.

Definición 1 *El momentum de una partícula de masa* m *que se desplaza con velocidad* $\mathbf{v}$ *es*

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}\,, \tag{1}$$

claramente, esta definición depende del concepto de masa que aún no hemos dado, pero dejemos correr esta arruga un poco.

Primera ley del movimiento *Una partícula sobre la que no actúa una fuerza neta se mueve con momentum constante cuando es descrita por un observador inercial.*

En el lenguaje moderno la primera ley se expresa declarando como equivalentes a todos los observadores inerciales[4] y enunciando que las otras dos leyes del movimiento sólo son válidas para estos.

Segunda ley del movimiento *La derivada temporal (tasa de cambio) del momentum de una partícula está dada por*

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}\,, \tag{2}$$

donde $\mathbf{F}$ *es la fuerza neta que act'ua sobre la partícula.*

Tercera ley del movimiento *Cuando una partícula ejerce una fuerza sobre otra, esta última ejerce sobre la primera una fuerza cuya magnitud y sentido son igual y opuesto a la fuerza que la primera partícula ejerce sobre la segunda.*

Expresado en otros términos. Considérense dos cuerpos en interacción. Si $\mathbf{F}_{12}$ es la fuerza que el cuerpo 1 ejerce sobre el 2,el cuerpo 2 ejercera sobre el 1 una fuerza de la misma dirección y magnitud que $\mathbf{F}_{12}$ pero con sentido opuesto a esta.

Quizá la observación más obvia que se puede hacer acerca de la tercera ley de Newton sea la siguiente: los puntos de aplicación de las fuerzas (pares) de acción y reacción son diferentes.

[4] y claro, como inequivalentes a los observadores no inerciales

3.1. ¿Qué establecen las leyes de Newton?

3.1.1. Ley de Inercia

La primera ley establece la existencia y equivalencia de los observervadores inerciales. Hay que destacar el grado de abstracción de este axioma. Un observador en tierra no es inercial, la tierra rota sobre su eje a una tasa de $2\pi\ rad/\text{día} \approx 7{,}3 \times 10^{-5}\ rad/seg$, si bien esta rotación es lenta, sus efectos son claramente observables, basta con ver un péndulo de Focault en algun museo localizado fuera de la franja intertropical (solo para que las cosas sucedan a un ritmo apreciable) así que para establecer la primera ley hay que imagin. ar un movimiento como lo vería un verdadero observador inercial.

Hoy día sabemos que lo más que podemos hacer es establecer la existencia local de observadores inerciales, lo que puede efectuarse experimentalmente observado el comportamiento de rayos de luz que se propagan en el vacio. En todo caso, lo fundamental de la primera ley es lo siguiente: la física que miedn dos observadores inerciales diferentes es la misma.

3.1.2. Ley de Fuerza

La forma má usual de la segunda ley de Newton consiste en notar que esta involucra una propiedad intrínseca de la materia (la masa) que demuestra que si se escoge un patrón y una forma de medir la aceleración puede medirse la fuerza a través de un cociente adecuado.

En estas notas queremos hacer énfasis en algo un poco más práctico, la igualdad

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} \tag{3}$$

puede entenderse de dos maneras.

En primer lugar, si conocemos el lado derecho ($\mathbf{F}$) y la masa de la partícula sometida a la fuerza, la igualdad puede ser interpretada como una ecuación diferencial que permite calcular (a menos de las condiciones iniciales) la ley de movimiento $\mathbf{r}(t)$ de la partícula.

En segundo, si conocemos la ley horaria $\mathbf{r}(t)$ podremos decir cosas acerca de la naturaleza de la fuerza que actúan sobre una partícula.

Ejemplo 1 *¿Qué ocurre cuando la fuerza neta que actúa sobre una partícula es nula?. Según la primera ley (enunciada en su forma original) el cuerpo debe moverse con momentum constante. Veamos que dice la segunda ley, según algun observador inercial ($\mathcal{O}$) la ecuación de movimiento del cuerpo será*

$$\dot{\mathbf{p}} = 0\,, \tag{4}$$

de manera que $\mathbf{p}$ *tiene que ser un vector constante llamémosle* $\mathbf{p}_0$ *que es lo que establece la primera ley, de manera que no hay inconsistencia entre esta y la segunda ley de Newton.*

Ahora bién, como $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ *resulta que la constancia de* $\mathbf{p}_0$ *implica:*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0\,, \tag{5}$$

donde $\mathbf{v}_0$ *es una velocidad constante que puede ser medida por ($\mathcal{O}$).*

Por otra parte, lo único que ocurre cuando se cambia de un sistema de referencia inercial a otro es la adición de la velocidad relativa $\mathbf{V}$ *entre los observadores, de manera que, si ($\mathcal{O}'$) es otro observador inercial cuya velocidad medida por ($\mathcal{O}$)* $\mathbf{V}$ *es constante, la velocidad del móvil según ($\mathcal{O}'$) será*

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_0 - \mathbf{V}\,, \tag{6}$$

que de hecho también es constante. Más aún, si $\mathbf{V} = \mathbf{v}_0$*, es decir, si* $\mathcal{O}'$ *es comovil con la partícula, esta será descrita por* $\mathcal{O}'$ *como en reposo, en definitiva:*

Una partícula sobre la que no actúan fuerzas permanece en reposo o permanece en movimiento rectilíneo uniforme. que es el enunciado est'andar de la primera ley de Newton.

3.1.3. Ley de Acción y Reacción

El primer comentario que debemos hacer en relación a la tercera ley no tiene que ver con física sino con psicología. Cuando se comienza a estudiar una disciplina aparece una fuerte tendencia a memorizar oraciones y/o frases breves que supuestamente resumen conceptos. En el caso de la tercera ley la oración resumen usual reza algo por el siguiente estilo: *Los pares de acción y reacción son fuerzas iguales y opuestas.* Acá me voy a permitir solicitarle en los términos más enfáticos que no memorice o utilice esta expresión o alguna que se le parezca. Estos pseudoresumenes son típicamente falsos (o peor aún: totalmente erróneos), por su brevedad se incorporan muy facilmente al conjunto de sus preconceptos y permanecen allí en su subconciente esperando la primera oportunidad para liberarse de su prisión, pasar a su conciente y hacerlo cometer errores garrafales.

Vamos a describir la idea correcta de una vez por todas, consideremos dos partículas interactuantes, y llamemos al par de acción-reacción: $\mathbf{F}_{12}$ y $\mathbf{F}_{21}$. En nuestros estudios acerca de vectores y cinemática hicimos énfasis en que la igualdad de la magnitud dirección y sentido solo implica la igualdad entre vectores deslizantes, las fuerzas no son vectores deslizantes, hay que considerar el punto en que se aplican (la posición del origen de la fuerza) y por lo tanto la fórmula: $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ debe interpretarse en el sentido de la igualdad entre vectores no deslizantes, es decir: que ambos vectores son paralelos, de igual magnitud y de sentidos opuestos recordando siempre que son vectores cuyos orígenes se encuentran en puntos distintos.

Vamos ahora con una interpretación de la *Tercera Ley*. Una forma de entenderla es pensándola como un principio de <u>autoconsistencia</u>. Para entender esto consideremos el movimiento de una pelota entendiéndo a esta como un cuerpo constituido por dos partes, los trozos de la pelota ejercen sendas fuerzas $\mathbf{F}_{12}$ y $\mathbf{F}_{21}$ (que representan las fuerzas de cohesion que mantienen unidos a los trozos), y pueden tambien estar expuestas a la influencia de fuerzas externas $\mathbf{F}_1^{(ext)}$ y $\mathbf{F}_2^{(ext)}$. El movimiento de cada trozo es descrito por la segunda ley, es decir, por las ecuaciones de movimiento:

$$m_1\,\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_1^{(ext)} \tag{7}$$

$$m_2\,\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_2^{(ext)}\,, \tag{8}$$

si la bola se mueve como un solo cuerpo es necesario que $\ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{\mathbf{r}}_2 \equiv \mathbf{a}$, lo que nos permite simplificar las ecuaciones de movimiento que se reducen a

$$m_1\,\mathbf{a} = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_1^{(ext)} \tag{9}$$

$$m_2\,\mathbf{a} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_2^{(ext)} \tag{10}$$

si sumamos ambas ecuaciones obtenemos

$$M\,\mathbf{a} = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_1^{(ext)} + \mathbf{F}_2^{(ext)} \tag{11}$$

donde $M = m_1 + m_2$, ahora bién, según la segunda ley de Newton, si la bola se considera como un solo objeto su ecuación de movimiento debe ser

$$M\,\mathbf{a} = \mathbf{F} \tag{12}$$

donde $\mathbf{F}$ es la fuerza neta que actúa sobre la pelota, es decir, suma de todas las fuerzas que actúan sobre ella. Ahora bien, las fuerzas $\mathbf{F}_{21}$ y $\mathbf{F}_{12}$ no deben entenderse como fuerzas que actúan sobre la pelota como un todo (imaginemos una pelota puesta sobre una mesa y pensemos en cuales son las fuerzas que actúan sobre la pelota), de manera que la fuerza $\mathbf{F}$ debe estar dada por

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1^{(ext)} + \mathbf{F}_2^{(ext)} \,, \tag{13}$$

y esto solo es posible si imponemos la condición $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ que no es otra cosa que la tercera ley.

Otra manera de entender la necesidad de imponer la tercera ley consiste en pensar en un objeto libre de fuerzas y observar que este debe moverse con momentum constante.

La 3^a ley de Newton es la base de la construcci'on de los diagramas de cuerpo libre.

4. Aplicacion a ejemplos de una sola partícula

Algunos de los ejemplo que vamos a tratar en estas notas son algo diferentes a los / ejemplos usuales que usted encontrará en los libros de texto para los cursos de física básica para ciencias e ingeniería. Se espera que al seguir estos ejemplos en términos de las técnicas que utilizaremos usted tenga una mejor oportunidad de entrenarse en las ideas físicas y abandonar sus preconceptos.

Ejemplo 2 *El primer ejemplo que trataremos es totalmente elemental. Considere un objeto puntual de masa m que -descrito desde un sistema inercial- se mueve bajo la acción de una fuerza constante $\mathbf{F}$ =constante.*

La segunda ley de Newton nos permite encontrar aceleración de la partícula: $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$, que por ser constante, implica que el movimiento de la partícula obedece la "ley horaria"

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{F}}{2\,m}\,(t - t_0)^2 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \mathbf{r}_0\,, \tag{14}$$

donde -como usted ya sabe- $\mathbf{v}_0$ y $\mathbf{r}_0$ son las condiciones iniciales de la partícula.

Ejemplo 3 *Nuestro siguiente ejemplo es algo más sofisticado. Considérese una partícula que se mueve a lo largo de una recta bajo la acción de una fuerza dependiente del tiempo ($\mathbf{F}(t)$). En este caso es conveniente expresar la aceleración como*

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{m}\mathbf{F}(t) \tag{15}$$

que de acuerdo al teorema fundamental del cálculo infinitesimal, esto es, integrando en ambos lados de la igualdad lleva al resultado

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(s)\,ds\,, \tag{16}$$

donde como siempre $\mathbf{v}_0$ es la velocidad de la partícula en el instante t_0.

Con el único objetivo de volver sobre discusiones anteriores, supongamos que la fuerza y la velocidad como combinaciones lineales de los elementos de una base ortonormal $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ del espacio la fórmula 16 se expresa como la suma de tres integrales:

$$\mathbf{v}(t) \;=\; \hat{\mathbf{e}}_1 \left(v_{01} + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} ds\, F_1(s)\right) + \tag{17}$$

$$+ \quad \hat{\mathbf{e}}_1 \left(v_{02} + \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t} ds\, F_2(s) \right) + \tag{18}$$

$$+ \quad \hat{\mathbf{e}}_1 \left(v_{03} + \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t} ds\, F_3(s) \right) . \tag{19}$$

Una vez encontrada una fórmula explícita para la velocidad ($\mathbf{v}(t)$*, es posible integrar una vez más utilizando la condición inicial* $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ *para encontrar la ley de movimiento* $\mathbf{r}(t)$*.*

El razonamiento que acabamos de presentar es exactamente el razonamiento que lleva a la fórmula 14 del ejemplo 2 (hágalo como ejercicio).

Ejemplo 4 *Considérese una partícula que se mueve a lo largo de una recta considérense adicionalmente coordenadas* x *a lo largo de la recta y un vector unitario* $\hat{\mathbf{e}}$ *orientado en el sentido positivo de las* x*.*

Bajo estas condiciones suponga que la partícula se mueve bajo la acción de una fuerza dependiente de su posición, esto decir, por una fuerza de la forma

$$\mathbf{F} = F(x)\, \hat{\mathbf{e}} . \tag{20}$$

Donde $x(t)$ *es la componente del vector de posición de la partícula.*

La segunda ley de Newton nos permite escribir la ecuación de movimiento en términos de componentes como

$$m\ddot{x} = F(x) . \tag{21}$$

Ahora bien, de acuerdo a la regla de la cadena

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = v\,\frac{dv}{dx} , \tag{22}$$

Lo que nos permite poner

$$m\, v\, \frac{dv}{dx} = F(x) . \tag{23}$$

o

$$m\,v\,dv = F(x)\,dx\,, \tag{24}$$

que luego de una integración elemental arroja el resultado:

$$m\,\frac{v^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x} F(\xi)\,d\xi\,, \tag{25}$$

donde v_0 es la componente de la velocidad de la partícula en x_0 y v su componente en x.

Ejemplo 5 *Consideremos el ejemplo anterior en el caso de de una fuerza constante $F(x) = F_0$. La integral resulta elemental y se obtiene*

$$\int_{x_0}^{x} F(\xi)\,d\xi = F_0(x - x_0)\,, \tag{26}$$

es decir, el producto de la componente de la fuerza por el cambio de posición del móvil. Despejando el lado derecho y utilizando que $F_0/m = a$ obtenemos la conocida fórmula cinemática

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \tag{27}$$

Ejemplo 6 *Un "oscilador armónico" es una partícula de masa m cuyo movimiento está limitado a un segmento recto y que, en un referencial cuyo origen corresponde con el punto $x = 0$, es descrito por la "ley horaria"*

$$x(t) = A\,cos(\omega_0\,t + \phi)\,, \tag{28}$$

donde A, ω_0 y ϕ son constantes. A tiene unidades de longitud, ω_0 de tiempo^{-1} y ϕ es adimensional

La componente de la aceleración a lo largo del segmento de recta es: $a(t) = -A\,\omega_0^2\, cos(\omega_0\, t + \phi)$ *y por lo tanto la fuerza que actúa sobre la partícula puede escribirse como:*

$$\mathbf{F} = -\kappa\, x\, \hat{\mathbf{e}}\,, \tag{29}$$

donde: $\kappa = m\,\omega_0^2$ *es una constante con unidades de fuerza/longitud y como en ejemplos anteriores,* $\hat{\mathbf{e}}$ *es el vector unitario paralelo al segmento y que está orientado en el sentido positivo de las* x

Ejemplo 7 *Consideremos un movil puntual de masa* m *cuya ley horaria descrita por un observador inercial es*

$$\mathbf{r}(t) = R\,\left[cos\omega_0\, t\, \hat{\mathbf{e}}_1 + sen\omega_0\, t\, \hat{\mathbf{e}}_2\right]\,. \tag{30}$$

en donde R *y* ω_0 *son constantes. En los ejercicios o ejemplos anteriores usted ya debe haber estudiado algunos aspectos del movimiento, entre otros, debe haberse convencido de que la trayectoria es un circulo de radio* R *y que por lo tanto en todo momento la velocidad es ortogonal al vector de posición* $\mathbf{r}(t)$*, además la rapidez es constante y dada por:* $\dot{s} = R\omega_0$ *lo que asegura que la aceleración es ortogonal a la velocidad*

Es facil ver que

$$\mathbf{a}(t) = -\omega_0^2\, \mathbf{r}(t) \tag{31}$$

lo que implica que la fuerza que produce este movimiento es radial, orientada hacia el centro de la trayectoria, y de magnitud (haga el calculito): $m\omega_0^2$*, por cierto, como la aceleración, la derivada de la velocidad es ortogonal a esta podemos estar seguros de que nuestro ejemplo es un movimiento de rapidez constante.*

Ejemplo 8 *Estudiemos un ejemplo que por dos razones es muy poco convencional. La primera razón es que desde el punto de vista físico el ejemplo dista bastante de las cosas que se discuten en los primeros capítulos de los libros de física para ciencias e ingeniería. La segunda es que trataremos de hacer el mínimo uso posible de las coordenadas. El objetivo de estudiar este ejmplo es hacerle ver lo lejos que puede llegarse utilizando las leyes de Newton.*

Este ejemplo posee un gran interés no solo para los estudiantes de física sino para la medicina, ya que corresponde a la descripción del movimiento de una partícula electricamente cargada que se mueve bajo la acción de un campo magnético constante que es una componente importante de los ciclotrones que se utilizan hoy día en las aplicaciones médicas.

Consideremos una partícula y un vector constante $\mathbf{B}_0$*, y supongamos que la fuerza que actúa sobre la partícula tiene la forma:*

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{B}_0 \times \mathbf{v}\,, \tag{32}$$

donde q *es una constante cuyas unidades multiplicadas por las del vector constante producen dimensiones de masa/tiempo.*

La aceleración de la partícula es por supuesto

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m}\,\mathbf{B}_0 \times \mathbf{v}\,, \tag{33}$$

que, por ser ortogonal a la velocidad demuestra que la rapidez de la partícula es constante.

Sus conocimientos acerca de vectores hacen evidente que la velocidad y la posición pueden descomponerse como

$$\mathbf{v} \;=\; \mathbf{v}_{||} + \mathbf{v}_{\perp} \tag{34}$$

$$\mathbf{r} \;=\; \mathbf{r}_{||} + \mathbf{r}_{\perp}\,, \tag{35}$$

donde $\mathbf{v}_{||}$ *y* $\mathbf{v}_{\perp}$ *son velocidades paralela y ortogonal a* $\mathbf{B}_0$ *respectivamente, mientras que la interespretación de* $\mathbf{r}_{||}$ *y* $\mathbf{r}_{\perp}$ *es similar.*

Las ecuaciones de Newton puede reescribirse como

$$\dot{\mathbf{v}}_{||} + \dot{\mathbf{v}}_{\perp} = \frac{q}{m}\,\mathbf{B}_0 \times \left(\mathbf{v}_{||} + \mathbf{v}_{\perp}\right) \, , \tag{36}$$

de donde, en virtud de las propiedades del producto vectorial, sigue:

$$\dot{\mathbf{v}}_{||} \;=\; 0 \tag{37}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{\perp} \;=\; \frac{q}{m}\,\mathbf{B}_0 \times \mathbf{v}_{\perp} \tag{38}$$

definidendo $\hat{\mathbf{b}}$ *como un vector unitario paralelo a* $\mathbf{B}_0$*, la primera de estas ecuaciones y los conocimientos que ya ha adquirido en este curso implican que* $z(t) = u_0\,(t - t_0) + z_0$*, donde* u_0 *es el valor de* $\mathbf{v}_{||}.\hat{\mathbf{b}}$ *en* $t = t_0$ *y* $z_0 = \mathbf{v}_{||}.\hat{\mathbf{b}}$ *en el mismo instante. En resumen, a esta altura podemos poner:*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\perp} + \left(u_0\,(t - t_0) + z_0\right)\,\hat{\mathbf{b}}\,, \tag{39}$$

La ecuación para $\mathbf{v}_{\perp}$

$$\mathbf{a}_{\perp} = \dot{\mathbf{v}}_{\perp} \;=\; \frac{q}{m}\,\mathbf{B}_0 \times \mathbf{v}_{\perp}\,, \tag{40}$$

y sus implicaciones es bastante más dificil, pero no nos asustemos y veamos que podemos hacer. En primer lugar, estamos seguros de que $\mathbf{v}_{\perp}$ *está siempre en un plano ortogonal al vector constante* $\mathbf{B}_0 = B_0\,\hat{b}$*). Más aún, como la aceleración proviene de un producto vectorial que contiene a* $\mathbf{v}_{\perp}$ *ocurre que* $\mathbf{a}_{\perp}\perp\mathbf{v}_{\perp}$*, lo que a su vez implica que la magnitud de* $\mathbf{v}_{\perp}$ *es constante (*$|\mathbf{v}_{\perp}| = \nu_0$*).*

Definiendo $\omega_0 = \frac{q}{m} B_0$ donde B_0 es la magnitud de $\mathbf{B}_0$ podemos poner

$$\mathbf{a}_\perp = \omega_0 \hat{\mathbf{b}} \times \mathbf{v}_\perp \,, \tag{41}$$

ó

$$\mathbf{a}_\perp = \omega_0 \, \nu_0 \, \hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{v}}_\perp \,, \tag{42}$$

donde $\hat{\mathbf{v}}_\perp$ es un vector unitario que en todo momento es paralelo a $\mathbf{v}_\perp$, en este punto no es mayor problema observar que esta ecuación tiene como consecuencia que (con las condiciones iniciales adecuadas)

$$\dot{\mathbf{r}}_\perp = \omega_0 \hat{\mathbf{b}} \times \mathbf{r}_\perp \,. \tag{43}$$

Acá vamos a pedirle que trabaje en términos de similaridades y que recuerde el problema xxx de la guía de problemas asociada a estas notas de clase para que crea que esta última ecuación tiene por solución

$$\mathbf{r} = \frac{\nu_0}{\omega_0} \left[cos(\omega_0 t) \, \hat{\mathbf{e}}_1 + cos(\omega_0 t) \, \hat{\mathbf{e}}_2 \right] + \left(u_0 \, (t - t_0) + z_0 \right) \, \hat{\mathbf{b}} \,, \tag{44}$$

en donde hemos escogido $\hat{\mathbf{e}}_1$ y $\hat{\mathbf{e}}_2$ de tal suerte que (i) el conjunto de vectores $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{b}}$ constituyen un triedro ortonormal dextrogiro, y que (ii) $\hat{\mathbf{e}}_1$ y $\hat{\mathbf{e}}_2$ se han escogido de tal suerte que $\mathbf{r}_\perp(0) || \hat{\mathbf{e}}_1$ y $\mathbf{v}_\perp(0) || \hat{\mathbf{e}}_2$.

Antes de concluir, debemos comentar que el resultado final (44) no ha sido demostrado. La prueba es algo avanzada para este curso y la hemos omitido "por ahora".

En la tumba de Newton en la Abadía de Westminster en Londres se puede leer la siguiente inscripción:

H. S. E. ISAACUS NEWTON Eques Auratus,

Qui, animi vi prope divinâ,

Planetarum Motus, Figuras,

Cometarum semitas, Oceanique Aestus. Suâ Mathesi facem praeferente

Primus demonstravit:

Radiorum Lucis dissimilitudines,

Colorumque inde nascentium proprietates,

Quas nemo antea vel suspicatus erat, pervestigavit.

Naturæ, Antiquitatis, S. Scripturæ,

Sedulus, sagax, fidus Interpres

Dei O. M. Majestatem Philosophiâ asseruit,

Evangelij Simplicitatem Moribus expressit.

Sibi gratulentur Mortales,

Tale tantumque exstitisse

HUMANI GENERIS DECUS.

NAT. XXV DEC. A.D. MDCXLII. OBIIT. XX. MAR. MDCCXXVI

Según la traducción al inglés de G.L. Smyth[5], la inscripción reza

Here is buried Isaac Newton, Knight, who by a strength of mind almost divine, and mathematical principles peculiarly his own, explored the course and figures of the planets, the paths of comets, the tides of the sea, the dissimilarities in rays of light, and, what no other scholar has previously imagined, the properties of the colours thus produced. Diligent, sagacious and faithful, in his expositions of nature, antiquity and the holy Scriptures, he vindicated by his philosophy the majesty of God mighty and good, and expressed the simplicity of the Gospel in his manners. Mortals rejoice that there has existed such and so great an ornament of the human race! He was born on 25th December, 1642, and died on 20th March 1726/7.

[5] *The Monuments and Genii of St. Paul's Cathedral, and of Westminster Abbey* (1826), ii, 703-4